

Exercices de Probabilités et Statistiques

La difficulté des exercices est donnée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★★) et difficile (★★★).

Les exercices hors programme sont donnés par (†). Cette feuille d'exercice est destinée à l'apprentissage des concepts fondamentaux en probabilités et statistiques. Son niveau est fait pour des étudiant-e-s de niveau Licence. Elle est encore en cours de construction et sera complétée au fil du temps.

Si vous avez des questions ou des suggestions concernant ces exercices, n'hésitez pas à me contacter à l'adresse gwendal.debaussart@ens-paris-saclay.fr. Merci de m'envoyer un mail si vous trouvez des erreurs ou des ambiguïtés dans les énoncés, afin que je puisse améliorer cette feuille d'exercices. Bon courage à toutes et à tous !

Rappels de probabilités

Cette série d'exercices porte sur les variables aléatoires indépendantes et les fonctions de variables aléatoires indépendantes. En particulier, on s'intéresse à la manière de déterminer la fonction de répartition et la densité de telles variables aléatoires.

Determiner des fonctions de répartitions et des densités

Exercice 1 (★): $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$

1. Calculer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $X = U^2$.
2. Calculer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $Y = -\ln(U)$.
3. Calculer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $Z = U(1 - U)$.

Exercice 2 (★★): Soient $U_1, U_2, U_3 \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{U}[0, 1]$, $Z = \max(U_1, U_2)$ et $Y = \sqrt{U_3}$.

1. Calculer la fonction de répartition et la densité de Z .
2. Calculer la fonction de répartition et la densité de Y . Que peut-on dire ?
3. Calculer la densité de la variable aléatoire $W = Z + Y$.

Exercice 3 (★★): Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes et exponentielles de paramètre $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire $M = \min(X_1, X_2)$, et on note $N = X_3^2$.

1. Calculer la fonction de répartition et la densité de M .
2. Calculer la fonction de répartition et la densité de N .
3. Calculer la densité de la variable aléatoire $P = M + N$.

Convergence en loi, convergence en probabilité

Exercice 4 (★★): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition et la densité de M_n .

2. Montrer que la suite (M_n) converge en loi vers une variable aléatoire M . Déterminer la fonction de répartition et la densité de M .
3. La suite (M_n) converge-t-elle en probabilité vers M ?
4. On définit la variable aléatoire $Y_n = n(1 - M_n)$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de Y_n . La suite (Y_n) converge-t-elle en loi ? Si oui, vers quelle variable aléatoire ?

Exercice 5 (☆☆): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

1. Déterminer la loi de S_n .
2. Montrer que la suite (S_n/n) converge en probabilité vers une constante. Laquelle ? Converge-t-elle aussi en loi ?
3. On définit la variable aléatoire $T_n = S_n - n/\lambda$. La suite $(T_n/\sqrt{n})$ converge-t-elle en loi ? Si oui, vers quelle variable aléatoire ?

Statistiques descriptives

Estimateurs, consistance et biais

Exercice 6 (☆): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale de paramètres **inconnus** μ et σ^2 .

1. Montrer que l'estimateur de la moyenne empirique $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur sans biais de μ . Est-il consistant ?
2. Montrer que l'estimateur de la variance empirique $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_n)^2$ est un estimateur biaisé de σ^2 . Calculer son biais et proposer un estimateur non biaisé s^2 de σ^2 . Est-il consistant ?
3. Calculer les risques de $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ et s^2 . Comment se comparent les risques de $\hat{\sigma}^2$ et s^2 ?

Exercice 7 (☆): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre **inconnu** $p \in [0, 1]$.

1. Montrer que l'estimateur $\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur sans biais de p . Est-il consistant ?
2. Calculer le risque quadratique de cet estimateur.

Exercice 8 (☆☆): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre **inconnu** $\lambda > 0$.

1. Montrer que l'estimateur $\hat{\lambda}_n = 1/\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$ est un estimateur biaisé de λ . Calculer son biais et proposer un estimateur non biaisé de λ . Est-il consistant ?
2. Calculer le risque quadratique de ces deux estimateurs.

Exercice 9 (★ ★): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$. Le paramètre $\theta > 0$ est **inconnu**.

1. Montrer que l'estimateur $\hat{\theta}_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un estimateur biaisé de θ . Calculer son biais et proposer un estimateur non biaisé de θ . Est-il consistant ?
2. Calculer le risque quadratique de ces deux estimateurs.
3. Montrer que l'estimateur $\hat{\theta}'_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur sans biais de θ . Calculer son risque quadratique et le comparer avec les deux estimateurs précédents.

Estimateur du maximum de vraisemblance et méthode des moments

Exercice 10 (★): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale de paramètres **inconnus** μ et σ^2 .

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ et de σ^2 .
2. Montrer que ces estimateurs sont consistants.
3. Ces estimateurs sont-ils biaisés ou non biaisés ?
4. Calculer leurs risques quadratiques. Comparer avec les estimateurs vus à l'[Exercice 6](#).

Exercice 11 (†): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi ayant pour densité:

$$f(x; \mu, s) = \frac{1}{2s} \left[1 + \cos\left(\frac{x - \mu}{s} \pi\right) \right] \mathbb{1}\{|x - \mu| \leq s\} \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Remarque: Il s'agit de la loi de Cosinus, de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ (paramètre de position) et $s > 0$ (paramètre d'échelle).

1. Calculer $\mathbb{E}[X_i]$ et $\text{Var}(X_i)$, en déduire un estimateur par la méthode des moments de μ et de s . On pourra utiliser le fait que $f(x; \mu, s)$ est symétrique par rapport à μ .
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ et de s .
3. Comparer les deux estimateurs obtenus.

Exercice 12 (†): Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi ayant pour densité:

$$f(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Remarque: Il s'agit de la loi de Laplace, de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ (paramètre de position) et $b > 0$ (paramètre d'échelle).

1. Calculer $\mathbb{E}[X_i]$ et $\text{Var}(X_i)$, en déduire un estimateur par la méthode des moments de μ et de b .
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ et de b .
3. Comparer les deux estimateurs obtenus.