

Suite et séries, exercices supplémentaires

La difficulté des exercices est donnée par le nombre d'étoile(s) : facile (★), moyen (★★) et difficile (★★★).

Les exercices hors programme sont donnés par (†). Si vous avez des questions, n'hésitez pas à me contacter par mail.

Partie 1 - Suites et Séries numériques

Exercice 1 (★★): Est-ce-que les suites suivantes convergent ? Est-ce-que les séries associées convergent ? Justifier vos réponses.

• $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$

• $u_n = (-1)^{\frac{1}{n}}$

• $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

• $u_n = \frac{1}{n^2}$

• $u_n = \frac{n^3+4n^2}{n^2+7n}$

• $u_n = \frac{\tanh(4n^2)}{n^4}$

• $u_n = \frac{\sin(\exp^n)}{n^8}$

• $u_n = \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 2 (★★): Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = a, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}. \quad (1)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et positive.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n) . Si elle converge, déterminer sa limite. *Indice: on peut regarder la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{1+x}$. Est-ce-que la série associée converge ?*

Exercice 3 (★★): On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}. \quad (2)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et positive.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n) . Si elle converge, déterminer sa limite. *Indice: on peut poser $v_n = u_n^{-1}$*
3. Montrer que la série associée converge et déterminer sa somme.

Exercice 4 (★★★): On considère la suite (u_n) définie par récurrence par:

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2u_n}. \quad (3)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et positive.
2. Montrer que $u_n \rightarrow l$.

3. Montrer que la série associée à $\sum_n (u_n - l)$ converge.

Partie 2 - Séries de fonctions