

Feuille exercice préparation CC2

Questions de cours

Exercice 1 :

1. Qu'est-ce que l'approximation poissonnienne ? Donner un exemple d'utilisation.
2. Donner la définition d'un estimateur consistant.
3. Énoncer le Théorème Central Limite, à quoi sert ce théorème dans le cours ?

Probabilités

A priori, la partie probabilité sera pas nécessairement la plus traitée lors du CC2. Elle est surtout importante pour bien comprendre comment créer les intervalles de confiance en utilisant la loi normale. On présente ici quelques variations des exercices de TD.

Exercice 2 (★) : Soit $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1.5)$ et $\mathbb{P}(X \leq 0.5)$
2. En déduire $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 1.5)$
3. Quelle loi suit $X = 2N + 3$?
4. Trouver t tel que $\mathbb{P}(X \leq t) = 0.9744$

Exercice 3 (★★) : L'influenceur *ThibzWonders* propose une nouvelle tendance TikTok, vue par 300 utilisateur·ice·s. On suppose qu'un·e utilisateur·ice suit la tendance avec une probabilité de 5%. Soit $(X_i)_{i=1}^{300}$ la variable aléatoire associée à l'évènement « l'utilisateur·ice i a suivi la tendance ». On s'intéresse ici à $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{300}$.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Donner $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}[Y]$.
3. Peut-on approximer la loi de Y par une loi de poisson ? Si oui, pourquoi ?
4. Calculer $\mathbb{P}[Y = 5]$ et $\mathbb{P}[Y = 10]$. En utilisant directement la loi de Y , puis si c'est possible, par approximation poissonnienne.
5. Est-il possible d'utiliser une loi normale pour approximer $\mathbb{P}[Y = 5]$? Si oui, pourquoi ? D'où vient l'approximation par une loi Normale ? Si c'est possible, approximer $\mathbb{P}[Y = 5]$ par une loi normale.

Exercice 4 (★★) : Soit $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$, une loi qui suit une loi exponentielle, $\alpha > 0$.

I.

1. Rappeler la densité de X .
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$, on supposera que $\int_0^\infty se^{-s}ds = 1$.
3. Soit $u, v > 0$, calculer $\mathbb{P}[X \geq u]$, puis $\mathbb{P}[X \geq u + v | X \geq u]$. Que peut-on dire ?

II. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ est l'entier maximal plus petit que t .

1. Trouver la loi de Y .
2. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.
3. Que peut-on dire de $\mathbb{P}[Y \geq u + v \mid Y \geq v]$?

Statistiques

Exercice 5 (★): Sur ses 100 dernières parties, Faker a gagné 75 parties.

1. Calculer la valeur moyenne et l'écart-type empirique de la série statistique.
2. Calculer les estimations ponctuelles de l'espérance et de la variance de la loi correspondante.
3. Donner au risque d'erreur 2% (le niveau de confiance est donc 98%) un intervalle de confiance de la probabilité de gagner une partie.

Exercice 6 (★★):

On suppose X est une variable aléatoire telle que:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 4) = 2p, \quad \mathbb{P}(X = 5) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 4p \quad (1)$$

Avec $p < \frac{1}{4}$. On cherche dans cet exercice à estimer p .

I.

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}[X]$.
2. Soit $Y = X^3$. Calculer $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}[Y]$.

II. Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes, qui suivent la loi 1.

1. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\text{Var}[S_n]$.
2. Soit $T_n = \frac{1}{n} S_n$. Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ et $\text{Var}[T_n]$.
3. Comparer $\text{Var}[T_n]$ et $\text{Var}[S_n]$, puis $\mathbb{E}[T_n]$ et $\mathbb{E}[S_n]$. Que peut-on dire?
4. Est-ce que S_n converge vers une constante ? Qu'en est-il de T_n ? Donner la ou les constante(s).

III.

1. Exprimer p à partir de $\mathbb{E}[X]$. Montrer qu'on peut construire un estimateur sans biais de p à partir de T_n .
2. Montrer qu'un tel estimateur est consistant.
3. À partir de $Y = X^3$, construire un estimateur sans biais de p . On pourra s'aider du calcul de $\mathbb{E}[Y]$.
4. Entre ces deux estimateurs lequel est le plus efficace ?

Exercice 7 (★★): TitouGames joue à Valorant, soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de parties avant qu'elle en gagne une. Sur 10 jours, on obtient:

2, 1, 3, 4, 2, 1, 2, 4, 2, 0

1. Calculer la valeur moyenne et l'écart-type de cet échantillon.
2. On suppose que X suit une loi d'espérance μ et variance σ^2 , donner des estimateurs ponctuels de μ et σ^2 .
3. Donner un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance 95%.
4. On suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$. En déduire un intervalle de confiance pour p de même niveau. *Indice: $X + 1 \sim \mathcal{G}^*(p)$, donc $\mathbb{E}[X + 1] = \frac{1}{p}$.*